تمارين نموذجية في القسمة في $\mathbb{Z}$

التمرين الأول

1/ n عدد صحيح يختلف عن 1 ؛ نضع $a = 3n + 5$ و $b = n - 1$.

1/ أ) تحقق أنّ ؛ $a = 3b + 8$.

ب) جد قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا .

2/ أ) برهن أنّ ؛ $PGCD(a,b)$ هو قاسم لـ 8 .

ب) ناقش حسب قيم n القيم الممكنة لـ $PGCD(a,b)$.

التمرين الثاني

1/ a عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 ؛ p عدد طبيعي .

أ) أثبت أنّه إذا كان d قاسما للعددين $a^p - 1$ و $a^{p+1} - 1$ فإنّه قاسما لـ $a^p(a-1)$.

ب) أعط القيم الممكنة لـ $PGCD(4^{p+1} - 1; 4^p - 1)$.

2/ نعتبر المتتاليّة (U_n) المعرّفة كما يلي : $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

أ) تحقق أن U_2 و U_3 أوّليان فيما بينهما .

ب) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 4U_n + 1$.

ج) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ U_n هو عدد طبيعي .

د) عيّن $PGCD(U_{n+1};U_n)$ (يمكن الإستعانة بخوارزمية إقليدس .) .

3/ نعتبر المتتاليّة (V_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$.

أ) بيّن أنّ (V_n) هندسيّة ، أحسب (U_n) بدلالة n .

ب) استنتج $PGCD(4^{p+1} - 1; 4^p - 1)$ من أجل p عدد طبيعي .



حل التمرين الأول

1/ n عدد صحيح يختلف عن 1 ؛ نضع $a=3n+5$ و $b=n-1$

1/ أ) تحقق أنّ ؛ $a=3b+8$.

$$3b+8 = 3(n-1)+8 = 3n-3+8 = 3n+5 = a$$

ومنه : $\boxed{a=3b+8}$

ب) جد قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا

$\frac{a}{b}\in\mathbb{Z}$ معناه $\frac{3b+8}{b}\in\mathbb{Z}$ معناه $3+\frac{8}{b}\in\mathbb{Z}$

ومنه ، $b/8$ إذن ؛ $b\in D_8$ إذن : $b\in\{-1,-2,-4,-8,1,2,4,8\}$

ومنه : $n-1\in\{-1,-2,-4,-8,1,2,4,8\}$

إذن : $n\in\{0,-1,-3,-7,2,3,5,9\}$

2/ أ) برهن أنّ ؛ $PGCD(a,b)$ هو قاسم لـ 8.

لدينا : $a=3b+8$ ، نضع : $PGCD(a,b)=d$

إذن : $d|a$ و $d|b$ ومنه : $d|a-3b$

لكن : $a-3b=8$ ومنه $d/8$ أي $PGCD(a,b)$ قاسم لـ 8.

ب) ناقش حسب قيم n القيم الممكنة لـ $PGCD(a,b)$

$b=n-1$ و $a=3n+5$

- من أجل $\boxed{n=8k}$ معناه $8|n$ لكن $d|8$

إذن $d|n$ و $d|b$ أي $d|n-1$ و $d|n$ إذن

$d|n-(n-1)$ أي $d|n-n+1$ أي $d|1$ ومنه $\boxed{d=1}$

- من أجل $\boxed{n=8k+1}$ إذن : $b=n-1$ أي $b=8k$

إذن $8|b$ إذن ؛ $8|d$ ولدينا $d|8$

إذن $\boxed{d=8}$

$b=n-1$ و $a=3n+5$

- من أجل $n=8k+2$ إذن:

$a=3(8k+2)+5$ أي $a=24k+11$ و $b=8k+1$

إذن a و b فرديان و $PGCD(a,b)/8$

ومنه: $d=1$

- من أجل $n=8k+3$ ، $a=24k+14$ ، $b=8k+2$

إذن: $a=2(12k+7)$ ، $b=2(4k+1)$

نضع $PGCD(12k+7,4k+1)=d'$ ، إذن: $d'/12k+7$ و $d'/4k+1$

إذن: $d'/12k+3$ و $d'/12k+7$ ومنه:

$d'/12k+7-12k-3$ أي $d'/4$ ومنه $d'/4k$

و $d'/4k+1$ إذن $d'/1$ إذن $d'=1$

ومنه $PGCD(a,b)=PGCD(2(12k+7),2(4k+1))$

$=2\,PGCD(12k+7,4k+1)$

$=2$

ومنه: $d=2$

$b=n-1$ و $a=3n+5$

- من أجل $n=8k+4$ ، $a=24k+17$ ، $b=8k+3$

أي a و b فرديان $d/8$ إذن: $d=1$

- من أجل $n=8k+5$ ، $a=24k+20$ ، $b=8k+4$

أي: $a=4(6k+5)$ ، $b=4(2k+1)$

نضع $PGCD(6k+5,2k+1)=l$ ، $l/2k+1$ و $l/6k+5$

إذن: $l/6k+3$ و $l/6k+5$ إذن: $l/2$

إذن $l/2k$ و $l/2k+1$ ومنه: $l=1$

و $PGCD(a,b)=4\,PGCD(6k+5,2k+1)=4$

إذن $d=4$

$b = n - 1$ ، $a = 3n + 5$

- من أجل $n = 8k + 6$ ، $a = 24k + 23$

$b = 8k + 5$

أي: a و b فرديان ومنه: $d = 1$

- من أجل $n = 8k + 7$ ، $a = 24k + 26$ ، $b = 8k + 6$

أي: $a = 2(12k + 13)$ ، $b = 2(4k + 3)$

نضع $PGCD(12k + 13, 4k + 3) = m$ أي $m \mid 12k + 13$ و $m \mid 4k + 3$

إذن $m \mid 12k + 9$ و $m \mid 12k + 13$

ومنه: $m \mid 4$ ومنه $m \mid 4k$

و $m \mid 4k + 3$ إذن $m \mid 3$ إذن $m \mid 12k$

و $m \mid 12k + 13$ إذن $m \mid 13$ ومنه $m = 1$

ومنه: $PGCD(a, b) = PGCD(2(12k + 13), 2(4k + 3))$

$= 2\,PGCD(12k + 13, 4k + 3) = 2$

ومنه $d = 2$

ب الشكل العام: $n = \alpha k$ ، $n = \alpha k + 1$ ، ..... ، $n = \alpha k + (\alpha - 1)$ $(\alpha \in \mathbb{N})$

حل التمرين الثاني

1/ a عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 ؛ p عدد طبيعي .

أ) أثبت أنه إذا كان d قاسما للعددين $a^p - 1$ و $a^{p+1} - 1$ فإنه قاسما لـ $a^p(a - 1)$

$d \mid a^p - 1$ و $d \mid a^{p+1} - 1$ ومنه: $d \mid a^{p+1} - 1 - (a^p - 1)$

ومنه: $d \mid a^{p+1} - 1 - a^p + 1$ ومنه $d \mid a^{p+1} - a^p$ إذن:

$d \mid a^p(a - 1)$

ب) أعط القيم الممكنة لـ $PGCD(4^{p+1} - 1; 4^p - 1)$

نضع $a = 4$ إذن: $a^{p+1} - 1 = 4^{p+1} - 1$ ، $a^p - 1 = 4^p - 1$

نضع: $PGCD(4^{p+1}-1, 4^{p}-1)=d$ إذن: $d|4^{p}-1$ و $d|4^{p+1}-1$

فإن: $d|4^{p}(4-1)$ ومنه: $d|4^{p}\times 3$ أي $d|3\times 4^{p}$.

ومنه $d|3$ أو $d|4^{p}$ أو $d|3\times 4^{p}$.

لكن: d ليس زوجي لأنه يقسم العدد الفردي $4^{p+1}-1$.

ومنه: d فردي إذن $d|3$ ومنه $d=1$ أو $d=3$.

2/ نعتبر المتتالية (U_n) المعرّفة كما يلي: $U_{n+2}=5U_{n+1}-4U_n$ من أجل كل عدد طبيعي n $\quad U_0=0, U_1=1$

أ) تحقق أن U_2 و U_3 أوليان فيما بينهما.

$U_2=5U_1-4U_0=5$, $U_3=5U_2-4U_1$

$U_3=21$, $U_2=5$, $PGCD(5,21)=1$

ومنه: 21 ، 5 أوليان فيما بينهما إذن U_2 ، U_3 أوليان فيما بينهما.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=4U_n+1$

$U_{n+2}=5U_{n+1}-4U_n$

نضع: $P(n): U_{n+1}=4U_n+1$.

- من أجل $n=0$ لدينا: $U_1=1$ و $4U_0+1=0+1=1$

ومنه $U_1=4U_0+1$ إذن $P(0)$ صحيح.

- نفرض أن $P(n)$ صحيح ونثبت صحة $P(n+1)$ (n عدد طبيعي)

$P(n)$ صحيح معناه: $U_{n+1}=4U_n+1$.

$U_{n+2}=5U_{n+1}-4U_n=5(4U_n+1)-4U_n=20U_n+5-4U_n$

$$U_{n+2}=16U_n+5$$

ولدينا:

$4U_{n+1}+1=4(4U_n+1)+1=16U_n+5$ ومنه: $U_{n+2}=4U_{n+1}+1$

أي $P(n+1)$ صحيح ومنه، $U_{n+1}=4U_n+1$ من أجل كل العدد الطبيعي n.

$U_{n+1} = 4U_n + 1$

ج) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ U_n هو عدد طبيعي

نضع : $Q(n): U_n \in \mathbb{N}$.

- من أجل $n=0$ لدينا $U_0 = 0$ و $0 \in \mathbb{N}$ إذن $Q(0)$ صحيح.

- نفرض أنّ $Q(n)$ صحيح ونثبت أنّ $Q(n+1)$ صحيح.

$Q(n)$ صحيح معناه $U_n \in \mathbb{N}$. لكن : $U_{n+1} = 4U_n + 1$

ومنه : $U_{n+1} \in \mathbb{N}$ ومنه $Q(n+1)$ صحيح

إذن : U_n عدد طبيعي مهما كان العدد الطبيعي n .

د) عيّن $PGCD(U_{n+1};U_n)$ (يمكن الإستعانة بخوارزمية إقليدس .)

نضع $\ell = PGCD(U_{n+1}, U_n)$ ومنه : ℓ / U_{n+1} و ℓ / U_n

إذن : $\ell / 4U_n + 1$ و $\ell / 4U_n$ إذن ، $\ell / 4U_n + 1 - 4U_n$

ومنه : $\ell / 1$ إذن : $\ell = 1$

ومنه $PGCD(U_{n+1}, U_n) = 1$

3/ نعتبر المتتالية (V_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$

أ) بيّن أنّ (V_n) هندسيّة ، أحسب (U_n) بدلالة n .

$$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{3} = 4U_n + 1 + \frac{1}{3} = 4U_n + \frac{4}{3}$$

$$V_{n+1} = 4\left(U_n + \frac{1}{3}\right) = 4V_n \;,\; V_{n+1} = 4V_n$$

إذن (V_n) هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول $\frac{1}{3}$.

لدينا : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$ ومنه $U_n = V_n - \frac{1}{3}$ إذن :

$$U_n = V_0 \times 4^n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}4^n - \frac{1}{3}$$

$$U_n = \frac{1}{3}\left(4^n - 1\right)$$

ب) استنتج $PGCD(4^{p+1}-1;4^{p}-1)$ من أجل p عدد طبيعي

وجدنا: $U_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ ومنه: $3U_n = 4^n - 1$

ومنه: $3U_{n+1} = 4^{n+1} - 1$ ، أي: $3U_p = 4^p - 1$

و $3U_{p+1} = 4^{p+1} - 1$

إذن $PGCD(4^{p+1}-1, 4^p-1) = PGCD(3U_{p+1}, 3U_p)$

لكن: $PGCD(U_{p+1}, U_p) = 1$

ومنه: $PGCD(4^{p+1}-1, 4^p-1) = 3\,PGCD(U_{p+1}, U_p)$

$= 3 \times 1 = 3$

ومنه: $\boxed{PGCD(4^{p+1}-1, 4^p-1) = 3}$

مع p عدد طبيعي.